به نام خدا

* دیکدینگ کدهای بلوکی خطی

(کره های دیکدینگ، نواحی دیکدینگ)

(آرایه استاندارد)

Leaders

ناحیه دیکدینگ کد دوم

D_2

$$
\overbrace{\begin{array}{ccccc}
\underline{v}_0 = \underline{0} & \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \cdots & \underline{v}_{2^k-1} \\
\underline{e}_1 & \underline{v}_1 + \underline{e}_1 & \underline{v}_2 + \underline{e}_1 & \cdots & \underline{v}_{2^k-1} + \underline{e}_1 \\
\underline{e}_2 & \underline{v}_1 + \underline{e}_2 & \underline{v}_2 + \underline{e}_2 & & \underline{v}_{2^k-1} + \underline{e}_2 \\
\vdots & & & & \\
\underline{e}_{2^{n-k}-1} & \underline{v}_1 + \underline{e}_{2^{n-k}-1} & \underline{v}_2 + \underline{e}_{2^{n-k}-1} & & \underline{v}_{2^k-1} + \underline{e}_{2^{n-k}-1}
\end{array}}^{C(n,k)}
$$

Standard Array

همدسته

برای تشکیل آرایه استاندارد، به ترتیب زیر عمل می کنیم.

۱- تمامی اعضای کد بلوکی خطی $C(n,k)$ یعنی $v_0 = 0, v_1, \dots, v_{2^k-1}$

را در سطر اول آرایه استاندارد قرار می دهیم.

2- یکی از الگوهای n تایی که در سطرهای قبلی آرایه ظاهر نشده است را انتخاب می کنیم و به عنوان leader در نظر می گیریم و آن را با تمامی اعضای کد $C(n,k)$ که سطر اول آرایه را تشکیل می دهند، جمع می کنیم. سطر بعدی آرایه (یک همگروه) را تشکیل می دهیم.

3- مرحله ی (2) را آنقدر تکرار می کنیم که تمامی اعضای فضای برداری n بعدی در آرایه ظاهر

شوند.

تعمیم: در روند تشکیل آرایه استاندارد به روش بالا، تمامی اعضای فضای برداری n بعدی در آرایه ظاهر می‌شوند و فقط یک بار در آرایه ظاهر می‌شوند.

نتیجه ۱: کل تعداد اعضای آرایه استاندارد $= 2^n$

نتیجه ۲: با توجه به اینکه تعداد ستون‌های آرایه برابر 2^k است، تعداد سطرهای آن برابر 2^{n-k} خواهد بود.

نتیجه ۳ - با کمک آرایه استاندارد می‌توانیم فضای برداری n بعدی را به تعداد اعضای $C(n,k)$ ناحیه بندی کنیم. ستون مربوط به پایه در این آرایه ناحیه مربوط به پایه است.

می‌خواهیم از این ساختار برای رمزگشایی کدهای بلوکی خطی استفاده کنیم. به همین جهت leader ها را الگوهای خطا با کمترین وزن همینگ در نظر می‌گیریم. به عبارت دیگر از وزن همینگ 1 شروع می‌کنیم و آرایه را تشکیل می‌دهیم و آنقدر جلو می‌رویم که آرایه کامل شود.

قضیه: برای یک کد بلوکی خطی $C(n,k)$ با قابلیت تصحیح خطای

$$t = \left\lfloor \frac{d_{min} - 1}{2} \right\rfloor$$

تمامی الگوهای خطای با وزن کمتر یا مساوی t می‌توانند به عنوان leader انتخاب شوند. پس از آنکه این الگوهای خطا به عنوان leader در آرایه قرار گرفتند، دست کم یک الگوی خطا با وزن $t+1$ وجود دارد که نمی‌تواند به عنوان leader انتخاب شود.

⇐ یک کد بلوکی خطی $C(n, k)$ حتماً می‌تواند تا t خطای رخ داده

کانال را تصحیح کند و ممکن است بتواند برخی الگوهای خطا با وزن $t+1$

را نیز تصحیح کند.

$$\underbrace{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{t}}_{\text{تعداد اعضای فضای } n \text{ بعدی که تا فاصله کمتر یا مساوی } t \text{ از یک کد نیز قرار گرفته اند}} \leqslant 2^{n-k}$$

اگر کران بسته‌بندی کروی با تساوی برقرار باشد، به این معنی است که آرایه استاندارد با الگوهای خطای با وزن کمتر یا مساوی t، کامل می‌شود. به این کدها، کدهای کامل می‌گوییم.

در غیر این صورت کد را کد شبه‌کامل می‌گوییم که در آن بعضی از الگوهای خطای با وزن $t+1$ نیز در آرایه استاندارد به عنوان leader انتخاب می‌شود در نتیجه این کدها می‌توانند برخی الگوهای خطای با وزن $t+1$ را نیز تصحیح کنند.

مثال - برای کد بلوکی خطی زیر

۱- مشخصات کد به صورت $C(n, k, d_{min})$ را به دست بیاورید.

۲- قابلیت تشخیص و تصحیح خطا را به دست بیاورید.

۳- آرایه استاندارد برای رمزگشایی این کد را تشکیل دهید

۴- بردار دریافتی تمام 1 را رمزگشایی کنید

$$\underline{v} = (1,1,1,1,1)$$

پیام‌ها $\underline{u}$	کدکلمه‌ها $\underline{v}$	
00	00000	$= \underline{v}_0$
01	01101	$= \underline{v}_1$
10	10111	$= \underline{v}_2$
11	11010	$= \underline{v}_3$

$K = 2 \ , \quad n = 5 \longrightarrow C(5, 2)$ با توجه به جدول که

$$R = \frac{K}{n} = \frac{2}{5}$$

$$\left.\begin{aligned}
d_H(\underline{v}_0, \underline{v}_1) &= 3 \\
d_H(\underline{v}_0, \underline{v}_2) &= 4 \\
d_H(\underline{v}_0, v_3) &= 3 \\
d_H(\underline{v}_1, \underline{v}_2) &= 3 \\
d_H(\underline{v}_1, v_3) &= 4 \\
d_H(\underline{v}_2, v_3) &= 3
\end{aligned}\right\} \Rightarrow d_{min} = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \left\lceil \dfrac{d_{min} - 1}{2} \right\rceil = 1 & \text{قابلیت تصحیح 1 خطا به‌طور قطع} \\ \\ s = d_{min} - 1 = 2 & \text{قابلیت تشخیص 2 خطا} \end{cases}$$

* کران بسته بندی کروی برای این کد

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} = 1 + 5 = 6 < 2^{n-k} = 2^{5-2} = 8$$

	D_0	D_1	D_2	D_3
	$\underline{v}_0 = 00000$	$\underline{v}_1 = 01101$	$\underline{v}_2 = 10111$	$\underline{v}_3 = 11010$
$\underline{e}_1 =$	00001	01100	10110	11011
$\underline{e}_2 =$	00010	01111	10101	11000
$\underline{e}_3 =$	00100	01001	10011	11110
$\underline{e}_4 =$	01000	00101	11111	10010
$\underline{e}_5 =$	10000	11101	00111	01010
$\underline{e}_6 =$	00011	01110	10100	11001
$\underline{e}_7 =$	00110	01011	10001	11100

کره همینگ

ناحیه گیرش

* اگر براساس گره‌های دیکدینگ، بازیابی انجام دهیم ← دیکدر خطای کامل (failure) دارد

* اگر براساس نرم‌های دیکدینگ بازیابی انجام دهیم ← دیکدر کامل

* بردار دریافتی $r = (11111)$ را دیکد کنید.

برای این کار جستجو می‌کنیم و می‌بینیم که بردار 11111 در ناحیه دیکدینگ v_2
قرار گرفته است بنابراین کلمه کد v_2 را به عنوان کلمه کد ارسالی بازیابی می‌کنیم. همچنین

Leader مربوط به همگروه‌ای که 11111 در آن قرار دارد، یعنی e_4

همان الگوی خطای رخ داده در کانال است.

به عنوان تمرین: بردار دریافتی 11100 را در دو حالت دیکد کامل و دیکد ناکامل

دیکد کنید.

Digital Modulation مدولاسیون دیجیتال

همان طور که قبلاً هم اشاره شد، مدولاسیون دیجیتال یک اینترفیس بین بلوک های دیجیتال سیستم های مخابراتی و محیط آنالوگ انتقال اطلاعات (کانال های مخابراتی مانند فضای آزاد، آب و کابل مسی و ...) است.

بنابراین مدولاتور دیجیتال اطلاعات دیجیتال آماده شده برای ارسال روی کانال را بر روی شکل موج های مناسب با وضعیت کانال طراحی کرده و به سمت گیرنده

می نویسند. به عبارت دیگر اطلاعات ارسالی به شکل موج های حامل را مدوله می کنند. در نتیجه سیگنال ارسالی بر روی کانال و سیگنال دریافتی در گیرنده سیگنال هایی هستند که به صورت تصادفی با زمان تغییر می کنند. به این گونه سیگنالها فرآیندهای تصادفی می گوییم.

بنابراین در ادامه درس، ابتدا مطالب کلی در مورد فرآیندهای تصادفی را بیان خواهیم کرد و سپس به بررسی مدولاتورهای دیجیتال می پردازیم.

همان طور که گفتیم فرآیند تصادفی، سیگنالی است که به صورت تصادفی با زمان تغییر می کند. بنابراین یک فرآیند تصادفی $v(t;\xi)$ تابعی از دو پارامتر $t \in T$ و $\xi \in \Omega$ است. به عبارت دیگر $v(t;\xi)$ تابعی است

فضای پارامتر که معمولاً زمان است — فضای نمونه

که به هر نقطه از مجموعه $T \times \Omega$ یک عدد حقیقی نسبت می دهد.

$$T \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

فرآیندهای تصادفی

Stochastic processes

با توجه به اینکه فرآیند تصادفی $x(t;\xi)$ یک تابع دو پارامتری است،

برای اینکه شناخت دقیق تری از آن به دست بیاوریم، به ازای $t=t_i$

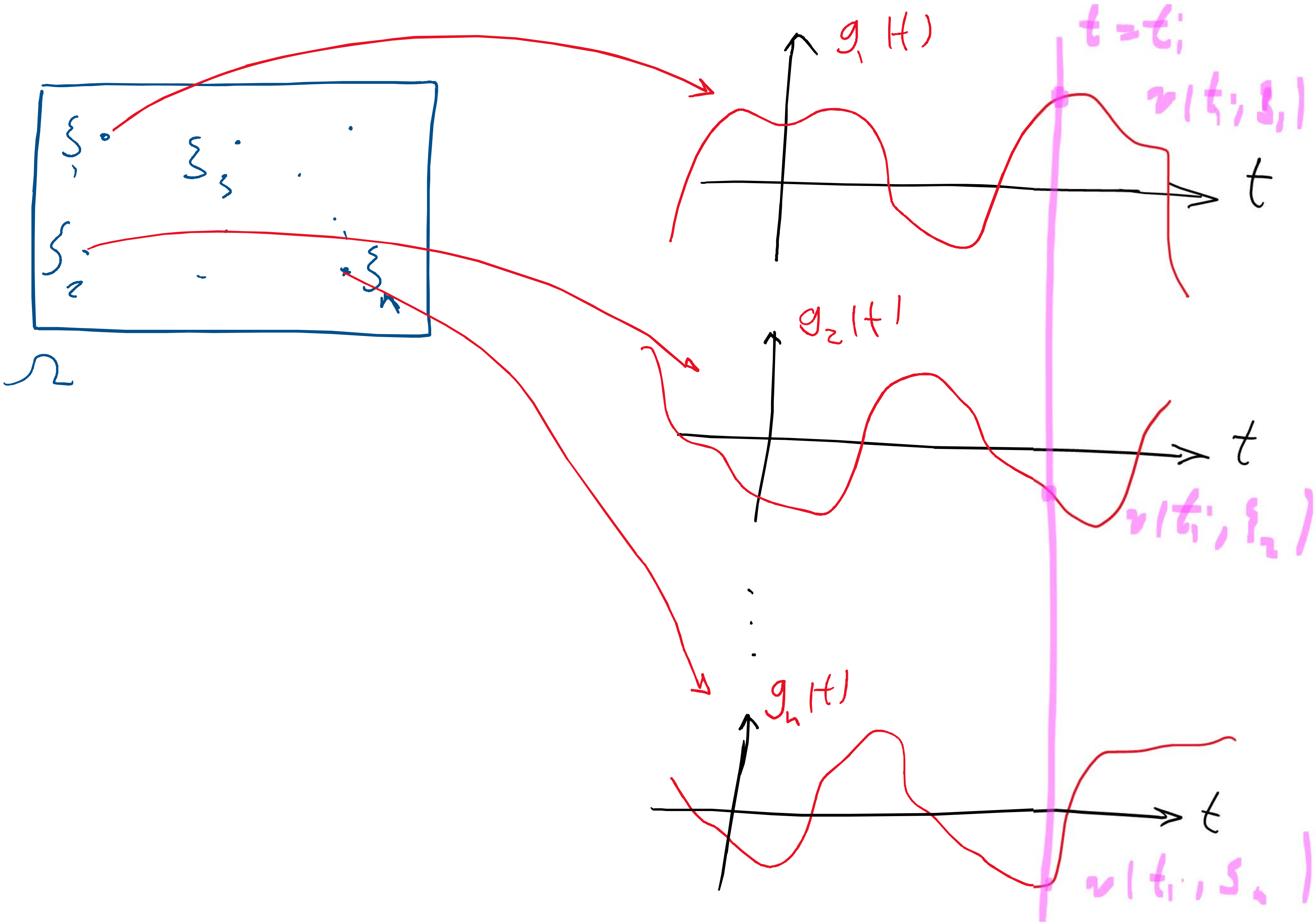
یعنی در یک زمان مشخص و به ازای $\xi=\xi_i$ یعنی به ازای یک نقطه مشخص

فضای نمونه، به آن نگاه می کنیم و خصوصیات آن را بررسی می کنیم.

۱) به ازای یک نقطه خاص از فضای نمونه $\xi = \xi_i$

$$x(t;\xi)\Big|_{\xi=\xi_i} = x(t;\xi_i) \equiv g_i(t)$$

همان طور که می‌بینیم به ازای یک نقطه خاص از فضای نمونه، ما یک تابع زمانی معین در دست داریم. بنابراین می‌توان گفت که فرایند تصادفی، تابعی است که به هر نقطه از فضای نمونه یک تابع زمانی را نسبت می‌دهد.



ξ_1
ξ_3
ξ_2
ξ_n
Ω
$g_1(t)$
$g_2(t)$
$g_n(t)$
t
t
t
$t = t_i$
$v(t_i, \xi_1)$
$v(t_i, \xi_2)$
$v(t_i, \xi_n)$

۲) اگر در یک زمان خاص $t = t_i$ به فرآیند تصادفی نگاه کنیم

$$v(t;\xi)\Big|_{t=t_i} = v(t_i;\xi) = V_i(\xi)$$

در این صورت باید متغیر تصادفی سروکار داریم.

به عبارت دیگر نمونه‌های زمانی یک فرآیند تصادفی، معادل متغیرهای تصادفی (ابزار تصادفی) هستند.

به عنوان مثال : فرض کنیم که ولتاژ دو سر یک مقاومت در یک مدار الکتریکی به ازای مقاومت های R_1 ، R_2 ، . . . ، R_{10} در یک بازه ی زمانی $[0, T]$ اندازه گیری کرده ایم . بنابراین یک فرآیند تصادفی به صورت $v(t;\xi)$ داریم که در آن

$$t \in [0, T] \quad , \quad \xi \in \{\underset{\xi_1}{R_1}, R_2, \ldots, \underset{\xi_{10}}{R_{10}}\}$$

$v(t;\xi_1) \equiv$ ولتاژ دو سر مقاومت R_1 در بازه $[0,T]$ $= v_1(t)$

$v(t;\xi_3) \equiv$ ولتاژ دو سر مقاومت R_3 در بازه $[0,T]$ $= v_3(t)$

بسته به اینکه کدام یک از مقاومت‌های R_0 یا R_1 انتخاب شوند، مقداری را برای ما مشخص خواهد کرد $\Longleftarrow$ یک متغیر تصادفی داریم

$$v(t;\xi)\Big|_{t=t_1} = v(t_1, \xi) = V_1(\xi)$$

ما به عنوان یک قرارداد برای ساده‌نویسی روابط، ξ را مستتر درنظر می‌گیریم

$$\underset{\text{اختصار}}{v(t;\xi) \equiv v(t)}$$

در مورد فرآیندهای تصادفی ، پارامترها ، خصوصیات آماری قابل اهمیت هستند که در ادامه به معرفی آنها می پردازیم.

Mean ۱) تابع میانگین برای یک فرآیند تصادفی $v(t)$

$$m_v(t) = E\{v(t)\} = E\,v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\, \underbrace{f_v(t)}\, dv$$

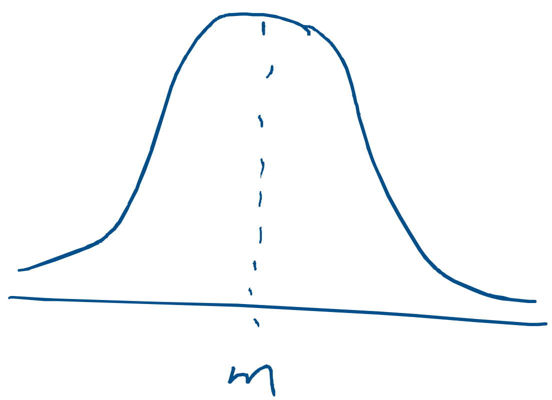
تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $v(t)$

$$m_v(t) = \overline{v(t)}$$

یادآوری: امید ریاضی یک تابع $g(.)$ از متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می‌شود

$$E\,g(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{g(x)}^{\text{مقادیری که } g(x) \text{ اختیار می‌کند}} \; \overbrace{\underbrace{f_X(x)}_{\text{تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی } X}\, dx}^{\text{هر کدامی}}$$

$\equiv$ معیاری از میانگین مقادیری که $g(X)$ اختیار می‌کند.



2) تابع همبستگی فرآیند $v(t)$

$$R_v(t_1, t_2) = E\, v(t_1)\, v(t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} v(t_1)\, v(t_2)\, f_2(t_1, t_2)\, dv_1\, dv_2$$

$R_v(t_1, t_2)$ نشان دهنده میزان همبستگی متغیرهای تصادفی لحظه‌های t_1 و t_2 از فرآیند است یعنی

$$\underbrace{v(t_1)}_{\text{متغیر تصادفی لحظه } t_1} \quad , \quad \underbrace{v(t_2)}_{\text{متغیر تصادفی لحظه } t_2}$$